接束とベクトル場

1　接束

接空間を含めて多様体を俯瞰すると、多様体の各点 $a \in M$ に対し、$T_aM \cong \mathbb{R}^m$ が乗っかっている状況である。この状況はまさにファイバー束である。特にファイバーでファイバーがベクトル空間になっているものをベクトル束と呼ばれる。

定義 1.1. ファイバー束 $p : E \longrightarrow B$ がベクトル束とは、各ファイバーが n 次のベクトル空間の構造を持ち、局所自明化写像の制限

$$\varphi : p^{-1}(x) \longrightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^n$$

が線形である時を指す。

二つのベクトル束 $p : E \longrightarrow B$ と $p' : E' \longrightarrow B'$ が与えられたとき、

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, "f"'] & B' \end{tikzcd}$$

を可換にする連続写像の組 $(\tilde{f}, f)$ で、$\tilde{f}$ をファイバーに制限したものが線形であるときベクトル束の間の写像と呼ぶ。

定義 1.2 (接束)**.** 滑らかな多様体 M に対し、$TM = \coprod_{a\in M} T_aM$ とおく。まずは集合としてこのように定め、以下で位相をどのように導入するか考えていく。

$$p : TM \longrightarrow M$$

を $X \in T_xM$ に対し、$p(X) = x$ で定義する。また、座標近傍 (U, φ) に対し、$p^{-1}(U) = TU$ であるが、

$$\tilde{\varphi} : p^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^m$$

を、$v = \sum_{i=1}^m \alpha_i \partial/\partial x_i$ に対し、$\tilde{\varphi}(v) = (x, \alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ により定義すると全単射になる。ベクトル束を構成したいので、TM に以下の条件を満たす最小の位相を導入する。M のすべての座標近傍に対し、

1. $p^{-1}(U)$ は TM の開集合となる。
2. $\tilde{\varphi} : p^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^m$ が同相写像となる。

座標近傍系が開被覆なのだから、最初の条件は p が連続となる条件と同値である。次の条件は局所自明化となる条件を意味している。この位相を別の言葉で書くならば、O が TM の開集合となるためには、すべての座標近傍に対し $\varphi_U^{-1}(O \cap p^{-1}(U))$ が $U \times \mathbb{R}^m$ の開集合となることと同値である。

$$\tilde{\varphi} : p^{-1}(x) = T_xM \longrightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^m$$

はベクトル空間としての同型を与えているので、$p : TM \longrightarrow M$ は m 次のベクトル束となる。

命題 1.3. TM は滑らかな $2m$ 多様体の構造を持ち、$p : TM \longrightarrow M$ は滑らかな写像となる。

証明 TM の座標近傍として、$p^{-1}(U)$ を用いる。局所自明化 $\tilde{\varphi}: p^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^m$ と M における座標写像 $\varphi: U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ を合成して、

$$(\varphi \times 1) \circ \tilde{\varphi}: p^{-1}(U) \longrightarrow \mathbb{R}^{2m}$$

が得られる。今、$U \cap V \neq \phi$ となる M の座標近傍を考えると、

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}: (U \cap V) \times \mathbb{R}^m \longrightarrow (U \cap V) \times \mathbb{R}^m$$

においては、$(x, \alpha_1, \cdots, \alpha_m) \mapsto (x, \beta_1, \cdots, \beta_m)$ と移す。このとき接空間の座標変換は、

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \frac{\partial y_i}{\partial x_j}$$

の関係式があった。$\partial y_i / \partial x_j$ は滑らかなので、$(U \cap V) \times \mathbb{R}^m$ に積多様体の構造を考えれば、$\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ も滑らかであり、TM に滑らかな多様体構造が入る。また、局所自明化の条件から、$p = \mathrm{pr} \circ \tilde{\varphi}$ と射影と局所自明化の合成で書け、両方とも滑らかなので p も滑らかである。 □

補題 1.4. 滑らかな写像 $f: M \longrightarrow N$ に対しては、各点での接空間間の線形写像 $df_a: T_aM \longrightarrow T_{f(a)}N$ が誘導された。これらの直和により、$df: TM \longrightarrow TN$ が定義できるが、これは連続である。

証明 開集合 $O \subset TN$ に対し、$df^{-1}(O)$ が TM の開集合であることを示せばよい。すなわち、任意の M の座標近傍 U に対し、

$$\tilde{\varphi}\left((df^{-1}(O) \cap p^{-1}(U))\right)$$

が $U \times \mathbb{R}^m$ での開集合であることを示す。今、$f(U) \cap V \neq \phi$ となる N の座標近傍 V をとる。それぞれの座標近傍を用いて、

$$J: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m,\ (\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \mapsto \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \frac{\partial y_1}{\partial x_i}(0), \cdots, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \frac{\partial y_n}{\partial x_i}(0) \right)$$

が与えられる。連続写像

$$f \times J: (U \cap f^{-1}(V)) \times \mathbb{R}^m \longrightarrow V \times \mathbb{R}^n$$

を考えると、$\tilde{\psi}(O \cap q^{-1}(V)) \subset V \times \mathbb{R}^n$ の逆像が $\tilde{\varphi}(df^{-1}(O) \cap (p^{-1}(U \cap f^{-1}(V)))$ である。O が TN の開集合であるから、その逆像も開集合。V を動かせば U を被覆できるので、題意が示せる。 □

定義 1.5. 滑らかな写像 $f: M \longrightarrow N$ に対して、補題 1.4 も合わせると、接束 $TM \longrightarrow M, TN \longrightarrow N$ の間のベクトル束写像 (df, f) が誘導される。接空間で見た時と同様に、$d(f \circ g) = df \circ dg$, $d_{1_M} = 1_{TM}$ であるので、M に対し TM、f に対し df を対応させることは、多様体の圏からベクトル束の圏への関手を与えている。また、TM, TN において滑らかな多様体構造も含めて考えた場合、df もまた滑らかな写像となる。

2 ベクトル場

多様体上の各点に接ベクトルが乗っかっている状況を考えよう。これは例えば、地球の表面を球面と考えたときに、各地点での磁場や風力などが挙げられる。これらはベクトル場と呼ばれている。各点でその点上の接ベクトルを対応させるのだから、これは $TM \longrightarrow M$ の切断に他ならない。

定義 2.1 (ベクトル場)**.** $X: M \longrightarrow TM$ で、$p \circ X = 1_M$ となる写像をベクトル場と呼ぶ。これは $a \in M$ に対し、$X_a \in T_aM$ を対応させるものである。今、$f \in C(M)$ に対し、$Xf: M \longrightarrow \mathbb{R}$ が、$Xf(a) = X_a(f)$ により定まる。任意の $f \in C(M)$ に対し、Xf が滑らかな時、X を滑らかなベクトル場と呼ぶ。$a \in M$ の周囲の座標近傍 $(x_1, \cdots, x_m)$ を選んだ時、

$$X_a = \sum_{i=1}^{m} X_i(a) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

の形で書けるが、$X_i(a) \in \mathbb{R}$ を X の i 成分と呼ぶ。全体で考えるか、開被覆で考えるかだけの違いなので X が滑らかであることと、任意の座標近傍で各 X_i が滑らかであることは同値である。

命題 2.2. $a \in U \cap V$ と２つの座標近傍を考えたとき、それぞれの座標を用いて

$$X_a = \sum_{i=1}^m \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^m \zeta_j \frac{\partial}{\partial y_j}$$

と表わされていたとする。このとき、

$$\zeta_j = \sum_{i=1}^m \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(0)\xi_i$$

である。

証明 任意の $f \in C(a)$ に対し、

$$X_a f = \sum_{i=1}^m \xi_i \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^m \xi_i \frac{\partial ((f\psi^{-1}) \circ (\psi \circ \varphi^{-1}))}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \xi_i \frac{\partial}{\partial y_j}(f)\frac{\partial y_j}{\partial x_i}(0)$$

なので、後は係数比較すればよい。 □

M 上のベクトル場全体を考えても、興味深い代数構造を持っている。

定義 2.3. $\mathcal{V}(M)$ を M 上の滑らかなベクトル場全体とする。$X, Y \in \mathcal{V}(M)$, $r \in \mathbb{R}$ と、$f \in C(M)$ に対し、

1. $(X+Y)_a = X_a + Y_a$
2. $(rX)_a = rX_a$
3. $(fX)_a = f(a)X_a$

によって実ベクトル空間でありかつ、$C(M)$-加群の構造も持つ。注意として fX と Xf の意味は違う。fX は上記で与えられる M 上のベクトル場であり、Xf は $Xf(a) = X_a(f)$ で与えられる M 上の関数である。
２つのベクトル場 $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ に対し、交換子積 $[X, Y] \in \mathcal{V}(M)$ を以下で定義する。

$$[X, Y](f) = X(Yf) - Y(Xf),\ f \in C(M)$$

命題 2.4. 交換子積は以下の性質を持つ。

1. （双線形性）$[X, Y+Z] = [X, Y] + [X, Z]$, $[X+Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z]$, $[rX, Y] = [X, rY] = r[X, Y]$
2. （可換性） $[X, Y] = -[Y, X]$
3. （Jacobi 律） $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

証明 1 はベクトル場の和の定義と、接ベクトルの性質から容易に導かれる。2 は交換子積の定義の形を見れば一目瞭然だろう。3 について見てみよう。$f \in C(M)$ について、

$$\begin{aligned}
([X, [Y, Z]])f &= X([Y, Z]f) - [Y, Z](Xf) \\
&= X(Y(Zf) - Z(Yf)) - (Y(Z(Xf)) - Z(Y(Xf)) \\
&= X(Y(Zf)) - X(Z(Yf)) - Y(Z(Xf)) + Z(Y(Xf))
\end{aligned}$$

と 4 つの項が出てくる。同様に $[Y, [Z, X]]f$, $[Z, [X, Y]]f$ も 4 つずつ項が出てきて、合計 12 個の項が出そろう。実際に書き表さないが、X, Y, Z の入れ替えで 6 通りの項がある。この符号が逆同志も含めた 12 個が出てくるので打ち消しあって、

$$([X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]])f = 0$$

となる。 □

上記の性質を満たす積 $[-, -]$ を備えたベクトル空間を Lie 環と呼ぶ。

3　1助変数群

ベクトル場は多様体上の各点に矢印が描かれている様を想像するとよい。その矢印をたどると、ある種の「流れ」が見えてくる。地球上の地場ならば北極点と南極点を結ぶように、放射線状に流れていく曲線が描けるはずである。これを数学的に記すと1助変数群という概念になる。ベクトル場と1助変数群は本質的には同じであることを述べる。

定義 3.1 (1助変数群). M を滑らかな多様体とし、滑らかな写像の族

$$\{\varphi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M\}$$

が1助変数群であるとは、任意の $t, s \in \mathbb{R}$, $x \in M$ に対し、

1. $\varphi(t+s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$
2. $\varphi(0, x) = x$

を満たすことである。$\varphi(t, -) = \varphi_t : M \longrightarrow M$ と書くことにする。上記の条件は、$\{\varphi_t\}$ たちが、

$$\varphi_t + \varphi_s = \varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$$

と置くことにより、加法群になることを意味している。これは M の微分同相群 $\mathrm{Diff}(M)$ の部分群である。φ_0 が恒等射となり、$\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$ である。逆に $x \in M$ を止めたとき、

$$\gamma_x = \varphi(-, x) : \mathbb{R} \longrightarrow M$$

は曲線であるが、この像を $\mathrm{Orb}(x)$ と書いて、x の軌道と呼ぶ。

補題 3.2. 任意の x, y に対し、$\mathrm{Orb}(x) = \mathrm{Orb}(y)$ または、$\mathrm{Orb}(x) \cap \mathrm{Orb}(y) = \phi$ である。

証明 今、$a \in \mathrm{Orb}(x) \cap \mathrm{Orb}(y)$ が存在した時に、両者の軌道が一致することを示せばよい。

$$a = \varphi_t(x) = \varphi_s(y)$$

と表せる。任意の $p = \varphi_r(x) \in \mathrm{Orb}(x)$ としたとき、

$$p = \varphi_r(x) = \varphi_{r-t+t}(x) = \varphi_{r-t} \circ \varphi_t(x) = \varphi_{r-t} \circ \varphi_s(y) = \varphi_{r-t+s}(y) \in \mathrm{Orb}(y)$$

となる。よって、$\mathrm{Orb}(x) \subset \mathrm{Orb}(y)$ であるが、逆の包含関係も同様に示せる。 □

上記のことから1助変数群は、各点を定めたときにそこを通る滑らかな曲線が与えられ、交差せずに M 上を流れていく。曲線があるならば、その点での速度微分により接ベクトルが得られる。

定義 3.3. 1助変数群 $\{\varphi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M\}$ が与えられたとき、ベクトル場

$$X_p = \left(\frac{d}{dt}\gamma_p\right)_{|t=0} = \frac{d\varphi}{dt}(0, p)$$

が得られる。これを1助変数群 $\{\varphi\}$ に付随したベクトル場と呼ぶ。

$$\varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi(t+s, x)$$

であるので、t で微分して、

$$X_{\varphi(s,x)} = \frac{d\varphi}{dt}(0, \varphi(s, x)) = \frac{d\varphi}{dt}(s, x)$$

を得る。

では逆にベクトル場が与えられた場合、その接ベクトルを速度微分として持つような曲線を描いて、1助変数群を得ることはできるだろうか。結論から言えば、微分方程式が解けるようなある点の小さな開近傍上では可能である。コンパクトな多様体ならば、それらの有限個の近傍で覆えるため、解である関数をつなげて全体に拡張できる。

定理 3.4. M をコンパクトで滑らかな多様体とする。X を M 上のベクトル場としたとき、1 助変数群 $\{\varphi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M\}$ が一意に存在し、

$$\frac{d\varphi}{dt}(t,x) = X(\varphi(x,t))$$

を満たす。

証明 $a \in M$ の周りの座標近傍 U に関して、$X = \sum X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ と書いておく。常微分方程式の解の存在と一意性により、十分小さい開区間 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ と開近傍 $0 \in U' \subset \mathbb{R}^m$ に対し、

$$\varphi_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U' \longrightarrow \mathbb{R}$$

1. $\varphi_i(0, x_1, \cdots, x_m) = x_i$
2. $\dfrac{d\varphi_i}{dt}(t, x_1, \cdots, x_m) = X_i(\varphi_1(t, x_1, \cdots, x_m), \cdots, \varphi_m(t, x_1, \cdots, x_m))$

となるものが存在する。また、十分小さい s に対し、

$$\overline{\varphi}_i(t, x_1, \cdots, x_m) = \varphi_i(t+s, x_1, \cdots, x_m)$$

とおくと、

$$\frac{d\overline{\varphi}_i}{dt}(t, x_1, \cdots, x_m) = X_i(\overline{\varphi}_1(t, x_1, \cdots, x_m), \cdots, \overline{\varphi}_m(t, x_1, \cdots, x_m))$$

であり、初期条件 $\overline{\varphi}(0, x_1, \cdots, x_m) = \varphi_i(s, x_1, \cdots, x_m)$ を満たす。常微分方程式の解の存在の一意性から、

$$\overline{\varphi}_i(t, x_1, \cdots, x_m) = \varphi_i(t, \varphi_1(s, x_1, \cdots, x_m), \cdots, \varphi_m(s, x_1, \cdots, x_m))$$

と一致する。よって、

$$\varphi_i(t+s, x_1, \cdots, x_m) = \varphi_i(t, \varphi_1(s, x_1, \cdots, x_m), \cdots, \varphi_m(s, x_1, \cdots, x_m))$$

であることがわかる。この局所的に定義された 1 助変数群は、M のコンパクト性から $\mathbb{R} \times M$ 上に拡張することができる。 □

命題 3.5. X を M 上のベクトル場とし、付随する（局所的な）1 助変数群を $\{varphi\}$ で表す。$x \in M$ に対し、$X(x) = 0 \in T_x M$ であることと、任意の t に対し、$\varphi(t,x) = x$ であることは同値。

証明 $\varphi(t,x) = x$ であるため、両辺を t で微分すると、$X(\varphi(t,x)) = X(x) = 0$ である。逆に、$X(x) = 0$ ならば、微分方程式の解の一意性から、$\varphi(t,x) = x$ しかない。 □

最後にベクトル場の交換子積 $[X,Y]$ の幾何学的意味を述べておく。

命題 3.6. ベクトル場 X, Y に対し、X に付随する 1 助変数群を $\{\varphi_t\}$ で表すと、

$$[X,Y](p) = \lim_{t \to 0} \frac{Y(p) - d\varphi_t(Y(\varphi_{-t}(p))}{t} \in T_p(M)$$

である。

証明 $f \in C(M)$ に対し、$g_t(p) = \dfrac{f(\varphi_t(p)) - f(p)}{t}$ とおく。$X(p) = \dfrac{d\varphi}{dt}(0,p)$ なので、

$$X(p)(f) = \frac{d(f \circ \varphi)}{dt}(0,p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\varphi_t(p)) - f(p)}{t} = \lim_{t \to 0} g_t(p)$$

となる。よって、$g_t(p)$ の定義を思い出せば、

$$d\varphi_t(Y(\varphi_{-t}(p)))(f) = Y(\varphi_{-t}(p))(f \circ \varphi_t) = Y(\varphi_{-t}(p))(f) + tY(\varphi_{-t}(p))(g_t(p))$$

であることがわかる。したがって、

$$
\begin{aligned}
&\left(\lim_{t\to 0}\frac{Y(p)-d\varphi_t(Y(\varphi_{-t}(p)))}{t}\right)f\\
&=\lim_{t\to 0}\frac{Y(p)(f)-Y(\varphi_{-t}(p))(f)-t(Y(\varphi_{-t}(p))g_t)}{t}\\
&=\lim_{t\to 0}\frac{Yf(p)-Yf(\varphi_{-t}(p))}{t}-\lim_{t\to 0}Y(\varphi_{-t}(p))g_t\\
&=X(p)(Yf)-Y(p)(Xf)=[X,Y](p)(f)
\end{aligned}
$$

と変形できるため、題意が得られる。 □

つまり、$[X,Y]$ とは X による Y の微分であることを示唆している。これを Lie 微分と呼んだりする。

参考文献

[萩上] 荻上 紘一　共立講座 21 世紀の数学 6 多様体 共立出版 大学数学

[服部] 服部 晶夫　多様体 (岩波全書) [単行本] 岩波書店; 増補版 (1989)